- Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

- Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\det : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ **2)** $\det : \mathcal{M} \overset{1-1}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ **3)** $\det : \mathcal{M} \overset{na}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ **4)** $\det : \mathcal{M} \underset{na}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} \mathbb{R}$ **5)** det je linearna

- Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je: **1)** $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$
2) $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$ **3)** $\text{rang} : \mathcal{M} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ **4)** $\text{rang} : \mathcal{M} \overset{1-1}{\to} \mathbb{N} \cup \{0\}$ **5)** $\text{rang} : \mathcal{M} \overset{na}{\to} \mathbb{N} \cup \{0\}$

- Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je:
1) $|\det(A)| = \lambda |\det(A')|$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ **2)** $\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$ **3)** $A \cdot A' = I$ **4)** $\det A = 0 \Leftrightarrow \det A' = 0$

- Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 3 i svaki skalar λ:
1) $A(BC) = (AB)C$ **2)** $(B + C)A = BA + CA$ **3)** $(AB)^2 = A^2B^2$ **4)** $A - B = B - A$ **5)** $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$
6) $\det(AB) = \det(B)det(A)$ **7)** $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)\text{rang}(B)$ **8)** $\det(A \cdot B) = \det(A) + \det(B)$

- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su kolinearni ako i samo ako: **1)** $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ **2)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
3) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ **4)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \le 2$ **5)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \le 1$ **6)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni
7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \lambda\vec{b}$ **8)** $\vec{a} \parallel \vec{b}$ **9)** $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \quad \big(\vec{a} = \lambda\vec{b}\ \lor\ \lambda\vec{a} = \vec{b}\big)$ **10)** $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0\ \land\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

- Neka je skup $\mathcal{A} = \Big\{(i, j) | i \in \{1, 2, \dots, m\} \land j \in \{1, 2, \dots, n\}\Big\}$. Tada za matricu M_{mn} nad poljem $\mathbb{R}$ važi:
1) $M_{mn} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ **2)** $M_{mn} : \mathcal{A} \overset{1-1}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ **3)** $M_{mn} : \mathcal{A} \overset{na}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ **4)** $M_{mn} : \mathcal{A} \underset{na}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} \mathbb{R}$ **5)** M_{mn} je linearna

- Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su komplanarni ako i samo ako:
1) $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ **2)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \le 2$ **3)** $\text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \le 3$ **4)** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$
5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ **6)** $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ **7)** $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0\ \land\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ **8)** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

- Neka su matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ i $B = [b_{ij}]_{nn}$ nad poljem $\mathbb{R}$. Tada postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je:
1) $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) \Rightarrow |\det(A)| = \lambda |\det(B)|$ **2)** $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) \Rightarrow \det(A) = \lambda \det(B)$
3) $|\det(A)| = \lambda |\det(B)| \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ **4)** $\det(A) = \lambda \det(B) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(B)$

- Ako je A kvadratna matrica reda 3, tada je: **1)** $\text{rang}A = 3 \Leftarrow \det A \neq 0$ **2)** $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang}A = 0$
3) $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang}A \le 2$ **4)** $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang}A = 3$ **5)** $\text{rang}A = 3 \Rightarrow \det A \neq 0$ **6)** $\text{rang}A = 3 \Leftarrow \exists A^{-1}$

- Neka su $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ matrice kolone nad poljem $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $(n^\top x)a = (an^\top)x$ **2)** $(n^\top a)x = (xn^\top)a$ **3)** $n^\top a = a^\top n$ **4)** $na = an$ **5)** $(n^\top x)a = n^\top(xa)$ **6)** $a^\top n = 0 \Rightarrow a \perp n$
(Napomena: $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ \ [\lambda] \cdot A \overset{def}{=} \lambda \cdot A = \lambda\, A$, za svaku matricu A).

- Za proizvoljne kvadratne regularne matrice A, B, C reda $n > 1$ važi:
1) $A(BC) = (AB)C$ **2)** $AB = BA$ **3)** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ **4)** $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$,
5) $A^2(B^2C^3) = (A^2B^2)C^3$ **6)** $(A^2B^2)^{-1} = B^{-2}A^{-2}$ **7)** $\det(A^3B) = (\det(A))^3 \cdot \det(B)$

- Ako je kvadratna matrica B dobijena od matrice A elementarnim transformacijama, tada je: **1)** $\exists A^{-1} \ \Leftrightarrow\ \exists B^{-1}$
2) $\det(A) = \det(B)$ **3)** $\det(A) \neq 0\ \land\ \det(B) \neq 0$ **4)** $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ **5)** $A \cdot B = I$ **6)** $A = \alpha B$ za neki skalar α

- Koje od tvrđenja je tačno ako je A kvadratna matrica reda n: **1)** $Rang(A) = 0 \Rightarrow det(A) = 0$
2) $det(A) = 0 \Leftrightarrow Rang(A) \le n - 1$ **3)** $Rang(A) = n \Rightarrow det(A) \neq 0$ **4)** $Rang(A) = n \Rightarrow det(A) = 0$.

- Za proizvoljne **komutativne** regularne matrice A, B, C reda n važi (sa $\mathbb{O}$ je označena nula-matrica reda n):**1)** $A + \mathbb{O} = \mathbb{O}$
2) $A \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$ **3)** $A + (B + C) = (A + B) + C$ **4)** $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ **5)** $A + \mathbb{O} = A$ **6)** $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)\text{rang}(B)$
7) $\text{rang}(A + B) = \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$ **8)** $AB = \mathbb{O}\ \Rightarrow\ (A = \mathbb{O}\ \lor\ B = \mathbb{O})$ **9)** $AA^{-1} = A^{-1}A$ **10)** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

- Neka su $\mathbf{a_1} = (a_{11}, \dots, a_{n1})$, $\mathbf{a_2} = (a_{12}, \dots, a_{n2})$, $\dots$, $\mathbf{a_n} = (a_{1n}, \dots, a_{nn})$ vektori kolne matrice
$A = A_{nn} = [a_{i,j}]_{nn}$ i neka je $V = \text{Lin}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots \mathbf{a_n}) = \{\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{a_n} | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$. Tada:
1) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}A < n$ **2)** $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}A \le n$ **3)** $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots \mathbf{a_n})$ je zavisna $\Leftrightarrow \det A = 0$
4) $\dim V \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}A \ge 1$ **5)** $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \dim V < n$ **6)** $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots \mathbf{a_n})$ je zavisna $\Leftrightarrow \text{rang}A < n$

- Odrediti rang r matrice A u sledeća 4 slučaja.

$$A=\begin{bmatrix} p & r & r & q \\ r & p & q & r \\ r & q & p & r \\ q & r & r & p \end{bmatrix}$$

a) $(p,q,r)=(0,0,0)$; **b)** $(p,q,r)=(1,1,-1)$; **c)** $(p,q,r)=(1,-1,0)$; **d)** $(p,q,r)=(1,-3,1)$;

a) r= **b)** r= **c)** r= **d)** r=

- Neka je $A\sim B \Leftrightarrow$ kvadratne matrice A i B reda n su ekvivalentne. Zaokruži tačno.
1) $A\sim B \Rightarrow \big(\det A=0 \Leftrightarrow \det B=0\big)$ **2)** $A\sim B \Leftrightarrow |\det A|=|\det B|$
3) $A\sim B \Rightarrow det(A)=\det B$ **4)** $\det A=\det B\neq 0 \Rightarrow A\sim B$ **5)** $(\det A\neq 0 \wedge \det B\neq 0)\Rightarrow A\sim B$ **6)** Ako je $\lambda\neq 0$, tada važi da $\det A=\lambda\det B \Rightarrow A\sim B$ **7)** $A\sim B \Rightarrow \big(\det A\neq 0 \Leftrightarrow \det B\neq 0\big)$

- Zaokruži tačan odgovor. Za proizvoljne kvadratne matrice A, B, C reda n važi:
1) $A(BC)=(AB)C$ **2)** $\det\lambda A=\lambda\det A$ **3)** $AB=BA$ **4)** $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
5) $\det(AB)=\det A+\det B$ **6)** $\det(A+B)=\det A+\det B$ **7)** $\det(AB)=\det A\det B$

- Neka $A\sim B$ znači da su matrice A i B ekvivalentne. Tada zaokruži tačan odgovor:
1) $A\sim B \Rightarrow \big(\text{rang}A=0 \Leftrightarrow \text{rang}B=0\big)$ **2)** $A\sim B \Rightarrow \det(A)=\det(B)$ **3)** $A\sim B \Rightarrow |\det(A)|=|\det(B)|$
4) $A\sim B \Leftrightarrow |\det(A)|=|\det(B)|$ **5)** $A\sim B \Leftrightarrow \big(\text{rang}A=0 \Leftrightarrow \text{rang}B=0\big)$ **6)** $\det(A)=\det(B)\Rightarrow A\sim B$

- Za koje vrednosti parametara $a,b,c\in\mathbb{R}$ su navedene funkcije linearne transformacije, i za one koje jesu, naći odgovarajuću matricu i diskutovati njen rang:

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ \ f(x,y,z)=(a^2x+b^3y-cx^2, 3y^a-4b^y)$ ____________________

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ \ f(x,y)=(x\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ ____________________

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \ f(x,y)=x+1$ ____________________

- Ako je $f(0)=0$, tada funkcija f: **1)** sigurno jeste linearna transformacija **2)** sigurno nije linearna transformacija **3)** može a ne mora biti linearna transformacija

- Zaokružiti funkcije koje su linearne transformacije:
1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ \ f(x,y)=(x+y,\sin(x+y))$ **2)** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ \ f(x,y)=(0,0,0)$
3) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ \ f(x,y,z)=(x+y,z,2z)$ **4)** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \ f(x,y)=x^2+y^2$

- U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},+,\cdot)$ navesti sve vektorske podprostore:

- Koji od sledećih podskupova $U\subseteq\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\dots,x_n)|x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}\}$ je podprostor:
a) $U=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_1=2x_2=\ldots=nx_n\}$ **b)** $U=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2=x_2^2\}$ **c)** $U=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_1=0\}$

- Linearna transformacija $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x-y,2x+ay)$ je izomorfizam akko $a\in$ __________

- Za svaku linearnu transformaciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i svako $x,y,\lambda,v\in\mathbb{R}$ tačno je: **1)** $x=0\Rightarrow f(x)=0$
2) $f(0)=0$ **3)** $f(0)=1$ **4)** $f(xy)=f(x)f(y)$ **5)** $f(xy)=x\,f(y)$ **6)** $f(x)=ax$ za neko $a\in\mathbb{R}$ **7)** $f(\lambda+v)=f(\lambda)+f(v)$

- Neka je $\vec{x}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$ proizvoljni vektor i neka je $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1,x_2,x_3)=\vec{m}\cdot\vec{x}$, gde je vektor $\vec{m}=m_1\vec{i}+m_2\vec{j}+m_3\vec{k}$ dati slobodni vektor. Funkcija $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ je:
1) linearna transformacija **2)** injektivna **3)** sirjektivna **4)** bijektivna **5)** izomorfizam

- Neka je $\vec{x}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$ proizvoljni vektor i neka je $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1,x_2,x_3)=\vec{m}\cdot\vec{x}$, gde je vektor $\vec{m}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$ dati slobodni vektor i α,β,γ uglovi je $\vec{m}$ obrazuje redom sa $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Funkcija $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ je:
1) linearna transformacija **2)** injektivna **3)** sirjektivna **4)** bijektivna **5)** izomorfizam **6)** $|\vec{m}|=1$

- Neka je $\varphi:V\to\mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k})=(x_1,x_2,x_3)$ tj. $\varphi(\vec{x})=(\vec{x}\vec{i},\vec{x}\vec{j},\vec{x}\vec{k})$, gde su $(V,\mathbb{R},+,\cdot)$ i $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},+,\cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi:V\to\mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija **2)** injektivna **3)** sirjektivna **4)** bijektivna **5)** izomorfizam

- Neka je $\psi:\mathbb{R}^3\to V$ definisana sa $\psi(x_1,x_2,x_3)=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_2\vec{k}$ tj. $\psi(\vec{x}\vec{i},\vec{x}\vec{j},\vec{x}\vec{k})=\vec{x}$, gde su $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},+,\cdot)$ i $(V,\mathbb{R},+,\cdot)$ vektorski prostori uređenih trojki i slobodnih vektora. Da li je funkcija $\psi:\mathbb{R}^3\to V$
1) linearna transformacija **2)** injektivna **3)** sirjektivna **4)** bijektivna **5)** izomorfizam

- Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$? **1)** $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$